PART2 自然数の和の公式，Σの性質

要点① 自然数の和の公式

1からnまでの自然数の和 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，初項1，公差1，項数nの等差数列の和であるから

$$1+2+3+\cdots\cdots+n= \qquad\qquad =\frac{1}{2}n(n+1)$$

と表される。また，$1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，和の記号Σを用いて $\sum_{k=1}^{n} k$ と表される。

よって，等式 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$ が成り立つ。

各項がすべて定数cである数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} c=\underbrace{c+c+c+\cdots\cdots+c}_{n\text{個}}=cn$$

である。

以上より，次の公式が成り立つ。

数列の和の公式①

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$　　$\sum_{k=1}^{n} c=cn$（cは定数）　　特に　$\sum_{k=1}^{n} 1=n$

要点② Σの性質

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots\cdots+(a_n+b_n)$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)=$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)=$$

であることから，次の性質が成り立つ。

Σの性質

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　　**2** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c は定数)

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}3=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$=\qquad\qquad+$

$=n(n+1)+3n$

$=n(n+1+3)$

$=n(n+4)$

2 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-5)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}6k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

Point Pickup

数列の和の公式①

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (c は定数)　特に　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

Σの性質

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　**2** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c は定数)

第 3 講 PART2 確認問題

次の和を求めよ。

1 $\sum_{k=1}^{n} 7 = \boxed{ア}\, n$

2 $\sum_{k=1}^{n} 8k = \boxed{イ}\, n\left(n + \boxed{ウ}\right)$

3 $\sum_{k=1}^{n} (4k+3) = n\left(\boxed{エ}\, n + \boxed{オ}\right)$

PART2 自然数の和の公式，Σの性質

2 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-5)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}6k$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

[解答]

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-5)=-5n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}6k=6\sum_{k=1}^{n}k=6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=3n(n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}(-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$=n(n+1)-n$$

$$=n^2$$

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 7 = \boldsymbol{7n}$$ [A]

[A]　$\sum_{k=1}^{n} c = cn$　（c は定数）

2

[正解] イ：4，ウ：1

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 8k = 8\sum_{k=1}^{n} k$$ [B]

$$= 8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$ [C]

$$= \boldsymbol{4n(n+1)}$$

[B]　$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$　（c は定数）

[C]　$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

3

[正解] エ：2，オ：5

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{n} 3$$ [D]

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 3n$$ [E]

$$= 2n^2 + 5n$$

$$= \boldsymbol{n(2n+5)}$$

[D]　Σ を分けて表す。

[E]　$\sum_{k=1}^{n} c = cn$　（c は定数）
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$